(13/5/2008)

TEMA 7: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

INTRODUCCIÓN.

Elementos con los que vamos a trabajar.

*** EJEMPLO 1:**

Sea $y(t)$, escribo $\boxed{y'(t) = \frac{1}{2} \quad , \quad t \in [0,1]}$ $\quad y'(t) = \dfrac{\partial y(t)}{\partial t}$

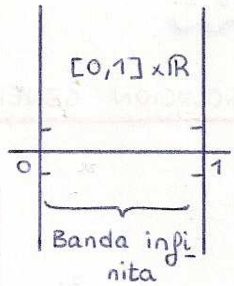
↳ ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA DE ORDEN 1.

¿Qué soluciones tiene?

$$y(t) = \frac{t}{2}$$

$$y(t) = \frac{t}{2} + 1$$

$\vdots$



Familia de soluciones uniparamétricas.

$\boxed{y(t) = \dfrac{t}{2} + C_1}$ ⟶ SOLUCIÓN GENERAL → Sólo depende de un parámetro.

Sea $\left(\frac{1}{2}, 7\right)$ entonces $\dfrac{1/2}{2} + c = y\left(\frac{1}{2}\right) = 7 \; ; \quad 7 = \frac{1}{4} + c \; ; \quad c = \frac{27}{4}$

⇓

$$y(t) = \frac{t}{2} + \frac{27}{4}$$

SOLUCIÓN NUMÉRICA EFECTIVA ⟹ PROBLEMAS DE SOLUCIÓN ÚNICA

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{ll} y'(t) = \dfrac{1}{2} \quad t \in [0,1] & \text{(EDO orden 1)} \\[2ex] y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 7 & \text{(Condiciones)} \end{array}\right.}_{\text{Problema de Valor Inicial}} \Longrightarrow \underbrace{y(t) = \frac{t}{2} + \frac{27}{4}}_{\text{Solución Particular}}$$

Vamos a escribir el problema con la condición añadida de que la condición inicial se encuentre en el límite inferior del intervalo de integración:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{y'(t) = \dfrac{1}{2} \quad t \in [0,1]} \\[2ex] y(0) = \dfrac{27}{4} \end{array}\right\}$$

* EJEMPLO 2:

SOLUCIÓN GENERAL DE UNA EDO DE ORDEN 2:

$$\boxed{y(t) = C_1 \operatorname{sen} t + e^t - \frac{\sqrt{t}}{C_2}}$$

* EJEMPLO 3:

CRECIMIENTO DE UNA POBLACIÓN. (Fotocopia)

[Ver también: Ejemplos 3 y 4 Fotocopia]

(14/5/2008)

MOTIVACIÓN:

Campo de estudio:

ESCENARIO CONTÍNUO

Sea $\boxed{\text{Ec. Dif.}}$ NOS INTERESA CONOCER →

Soluc. exacta / analítica (Análisis Matemático)

- Sólo se conoce en algunos casos.
- Incluso en estos casos es muy costoso computacionalmente evaluar la solución exacta.

Solución numérica (Este tema)

- **EFECTIVA** → Obtener valores (e.e. computador).
  OBJETIVO → Obtener programa / algoritmo.

  E: $\boxed{\text{EC. DIF. + COND'S INIC.}}$ → ALGORITMO → S: $\boxed{\text{Valores = Solución Aprox} \simeq \text{Solución exacta}}$

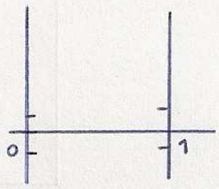
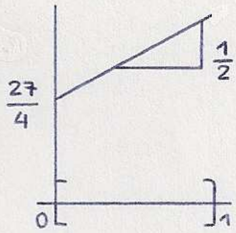
- **APROXIMADA** ("a mano")
  OBJETIVO → Obtener ERROR:
  - * **MAGNITUD** del error (lo grande / pequeño que es).
  - * **BONDAD** del error.

ESCENARIO DISCRETO (finito)

0. ESQUEMA GENERAL: RESOLUCIÓN NUMÉRICA EC. DIF.

* EJEMPLO:

Resumen de elementos en el ESCENARIO CONTINUO.

	PROBLEMA	SOL. ANALÍTICA	GRAF. SOLUCIÓN
DIMENSIÓN UNIPARAMÉTRICA	$y'(t) = \frac{1}{2} t \in [0,1]$ EC. DIF. ORDINARIA ORDEN 1.	$y(t) = \frac{t}{2} + C$ SOL. GENERAL	
DIMENSIÓN 1	$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{2} t \in [0,1] \\ y(0) = \frac{27}{4} \text{ cond. inicial} \end{cases}$ PROB. VALOR INICIAL	$y(t) = \frac{t}{2} + \frac{27}{4}$ ÚNICA SOL. PROBLEMA VALOR INICIAL	

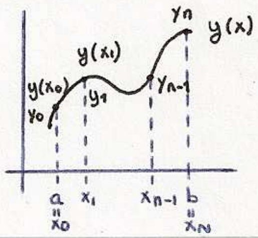
PROBLEMA:

Resolver o Cálculo eficaz de la solución de:

$$(P) = \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \ \boxed{1} \in [a,b] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{Ec. dif. Cond. inicial} \longrightarrow y(x) = \text{SOL. EXACTA en } [a,b]$$

$$\downarrow$$

$$(P_n) = \begin{cases} y_{n+1} = \mathcal{F}(x_{n+1}, x_n, y_n, y_{n+1}) \quad n = 0, \dots, N-1 \\ y_0 \text{ dado} \end{cases} \xrightarrow{\text{EC'S EN DIFERENCIAS}} \begin{array}{l} y_0, y_1, \dots, y_N \\ \text{SOL. APROX. EN } [a,b] \\ \text{EN } \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \end{array}$$



$\rightarrow \{y_n\} \ n = 0, \dots, N \ ; \ \{y(x_n)\} \ n = 0, \dots, N$

- PROBLEMA CONTINUO:

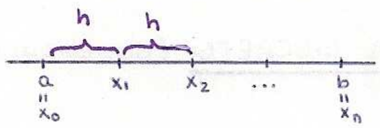
No se puede resolver con ordenador.

- MÉTODOS DE DISCRETIZACIÓN: PASO A PASO.

* Discretizamos dominio / malla $\Rightarrow$ Sea N = nº de nodos equidistantes

h = tamaño del paso

$$x_{n+1} = x_n + h$$



* Discretizamos Ecuaciones Diferenciales.

- PROBLEMA DISCRETO:

tal que: $\boxed{y_n \simeq y(x_n) \quad n = 0, \ldots, N}$

Resolver en ORDENADOR:

ENTRADA

$f(x, y(x))$, $[a,b]$
(x_0, y_0) (COND. INICIAL)
N (nº de nodos) ó
h (tamaño del paso)

$\rightarrow$

PROCESO

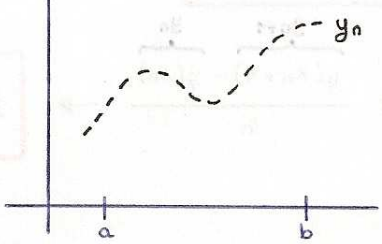
Método numérico
$y_{n+1} = \mathcal{F}(x_0, \ldots, y_n)$
$n = 0, \ldots, N-1$

$\rightarrow$

SALIDA

y_0
y_1
$\vdots$
y_n

$\Rightarrow y_n \simeq y(x_n)$
$n = 0, \ldots, N$



$$\text{Si } n \to \infty \Rightarrow \begin{cases} \text{Error más pequeño} \\ y_n \equiv y(x_n) \end{cases}$$

(20/5/2008)

* EJEMPLO: CONSTRUCCIÓN MÉTODO NUMÉRICO "NATURAL".

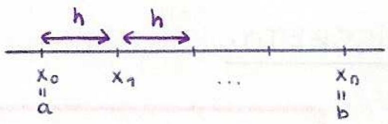
- PROBLEMA CONTINUO:

$$(P) = \begin{cases} y(x) = f(x, y(x)) \quad , \quad x \in [a,b] \quad \boxed{1} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- PROBLEMA DISCRETO (discretización)

* Discretizamos dominio / malla $\Rightarrow$ Sea N = nº pasos equidistantes, h = tamaño del paso.

$x_{n+1} = x_n + h$



* Discretizamos la ecuación diferencial $\boxed{1}$

- ESTRATEGIA:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Aproximamos } \boxed{1} \\ \text{Evaluamos } x_n \\ \text{Imponemos "="} \end{array}\right\} \text{Obtengo } \mathcal{F} \text{ (método numérico / algoritmo)}$$

$$\boxed{f(x, y(x)) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h}} \simeq y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \; ;$$

$$f(x, \underbrace{y(x_n)}_{\simeq y_n}) \simeq \frac{\overbrace{y(x_n+h)}^{y_{n+1}} - \overbrace{y(x_n)}^{y_n}}{h} \longrightarrow \boxed{f(x_n, y_n) = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}}$$

ALGORITMO / EC. DIFERENCIAL / MÉTODO NUMÉRICO

MÉTODO EULER (E) $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) & , n = 1, \dots, N \\ y_0 \end{cases}$

APLICACIÓN : Resolver numéricamente:

$$\left.\begin{array}{l} (P) \begin{cases} y'(x) = y(x) = f(x, f(x)) & x \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases} \\ + \\ (E) \begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) & n = 1, \dots, N \\ y_0 \end{cases} \end{array}\right\} \longrightarrow$$

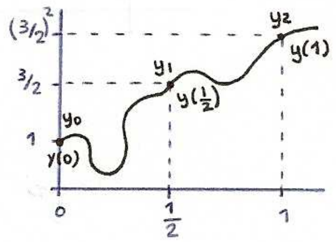
$$\longrightarrow (P_n) \begin{cases} y_{n+1} = y_n + hy_n & n = 1, \dots, N \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{ALGORITMO}}$$

PARTICULARIZACIÓN: Resolvemos para un tamaño de paso h.

$$* \; h = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} \{x_n\} = \{x_0 = 0, \; x_1 = \frac{1}{2}, \; x_2 = 1\} \\ (P_n) = \begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}y_n = \frac{3}{2}y_n & ; n = 1,2 \\ y_0 = 1 \end{cases} \end{cases} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left\{ y_0 = 1 \; , \; y_1 = \frac{3}{2} \; , \; y_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right\}$$



$y_0 = 1$
$y_1 \simeq y(\frac{1}{2})$
$y_2 \simeq y(1)$

$$* \; h = \frac{1}{4} \longrightarrow \begin{cases} \{x_n\} = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\} \\ (P_n) = \begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4} y_n = \frac{5}{4} y_n & n = 1, \dots, 4 \\ y_0 = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \left\{ y_0 = 1 \;,\; y_1 = \frac{5}{4} \;,\; y_2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \;,\; y_3 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 \;,\; y_4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 \right\}$$

La solución exacta que perseguimos es $y(x) = e^x$

ERROR: Lo podemos calcular con los dos pasos obtenidos anteriormente:

$$\underbrace{\left| e - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right|}_{h = \frac{1}{2}} > \underbrace{\left| e - \left(\frac{5}{4}\right)^4 \right|}_{h = \frac{1}{4}}$$

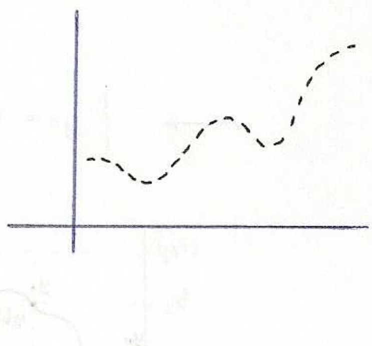
$\Rightarrow$ El error para un paso $h = \frac{1}{4}$ es menor.

ERROR $\rightarrow 0$ si $h \rightarrow 0$

ALGORITMO EULER: MATLAB

Datos: $f(x,y)$, x_0, y_0, N ó h

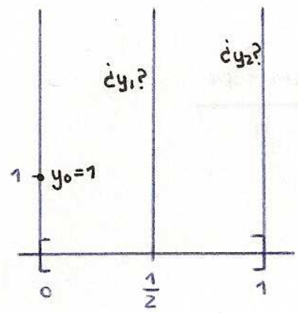
```
x = [ x0 : h : x0 + Nh ]
y(1) = y0
FOR  n = 1, ..., N
y(n+1) = y(n) + h f(x(n), y(n))
END
plot (x, y)
```

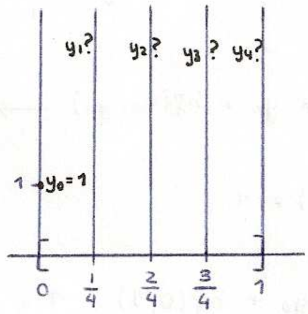


* EJERCICIO 1: INTERPRETACIÓN GRÁFICA MÉTODO EULER.

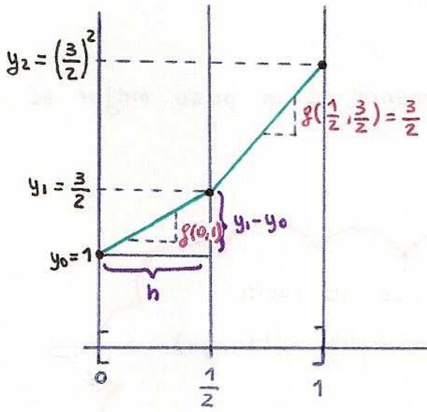
Resolver (P) $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ + (E)

con $h = \dfrac{1}{2}$ y $h = \dfrac{1}{4}$ con escuadra y cartabón.





* Para $h = \dfrac{1}{2}$



$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$f(x_n, y_n) = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$

$f(0,1) = 1$
$f(x,y) = y$
Sacado de la fórmula inicial

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$$

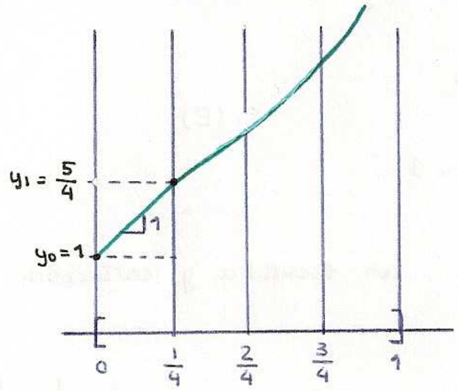
Calculamos el segundo paso:

Nos situamos en el punto $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

Hallamos la pendiente $\rightarrow f\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{2}$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{4} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

* PARA $h = \frac{1}{4}$



$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \longrightarrow f(x_n, y_n) = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$

$$f(0,1) = 1$$

$$y_1 = y_0 + hf(0,1) = 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{5}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4}$$

$$y_2 = y_1 + hf\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{4} + \frac{5}{16} = \frac{25}{16} = \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

Si seguimos aplicando vemos que cuanto menor es el paso mejor es el resultado, es decir, más afinado.

(E) => A partir de (x_n, y_n) trazamos la recta que pasa por (x_n, y_n) de pendiente $f(x_n, y_n)$.

y_{n+1} => Coordenada de la recta en la abscisa x_{n+1}

1. GENERALIDADES.

* CASO CONTINUO:

a) PROBLEMA DE VALOR INICIAL (PVI)

A una ecuación diferencial ordinaria (e.d.o.) de orden 1 con la condición inicial (ci)

$$(P) = \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in [a, b] \quad \boxed{1} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

DEFINICIÓN:

Sea una función $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitziana respecto a su segunda variable.

Existe cte $L > 0$ tal que:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

* Si $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existe, es continua y acotada $\Rightarrow$ f Lipschitziana respecto a su 2ª variable.

* EXISTENCIA y UNICIDAD de la solución:

Sea $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y Lipschitziana respecto a su segunda variable.
Entonces, (P) tiene única solución en el intervalo $[a, b]$:
$$y(x) \in C^1([a, b] \times \mathbb{R})$$

b) SISTEMAS LINEALES DE EDO.

Se reducen a un PVI utilizando notación vectorial y sustituyendo el valor absoluto $(|.|)$ por la norma $(\|.\|)$. En efecto, sea el sistema lineal de un PVI con c_i en el mismo punto x_0.

$$\left.\begin{array}{l} y_1'(x) = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \ , \ y_1(x_0) = y_{10} \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \ , \ y_2(x_0) = y_{20} \\ \vdots \\ y_m'(x) = f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \ , \ y_m(x_0) = y_{m0} \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{\left.\begin{array}{l} \bar{y}'(x) = \bar{f}(x, \bar{y}) \\ \\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0 \end{array}\right\}}$$

donde: $\bar{y}(x) = y_1(x), \dots, y_m(x)$

$\bar{f}(x, \bar{y}) = (f_1(x, y_1, \dots, y_m), \dots$

$\dots, f_m(x, y_1, \dots, y_m))$

* EJEMPLO:

$$(P) + (E) = \begin{cases} \bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + h f(x, \bar{y}_n) \\ \\ \bar{y}_0 = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{m0}) \end{cases}$$

EULER ESCALAR

$$(E) = \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \\ \\ y_0 \end{cases}$$

[EJEMPLO 1 HOJA: MODELO DEPREDADOR-PRESA LOCKE-VOLTERRA].

c) ORDEN DE LA EDO.

Un PVI de orden m se reduce a un sistema lineal de dimensión m, de ecs. dif. ordinarias, y éste a un PVI de orden 1 en forma vectorial.

$$\begin{cases} y^{m)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{m-1)}(x)) \quad x \in [a,b] \\ y(x_0) \\ y'(x_0) \\ \vdots \\ y^{m-1)}(x_0) \end{cases}$$

Cambio de variable: $\underline{z_1(x) = y(x),\ z_2(x) = y'(x), \dots, z_{m-1}(x) = y^{m-2}(x),\ z_m(x) = y^{m-1}(x)}$

orden 1

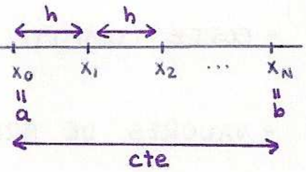
$$\boxed{\begin{array}{ll} z'_m(x) = f(x, z_1(x), \dots, z_m(x)) & ;\ z_m(x_0) = y_{m0} \\ z'_{m-1}(x) = z_m(x) & ;\ z_{m-1}(x_0) = y_{m-10} \\ \vdots & \\ z'_2(x) = z_3(x) & ;\ z_2(x_0) = y_{20} \\ z'_1(x) = z_2(x) & ;\ z_1(x_0) = y_{10} \end{array}} \rightarrow \text{SISTEMA LINEAL EDO CON CI EN } x_0$$

* CASO DISCRETO:

MÉTODOS DE DISCRETIZACIÓN.

Dominio: $[a,b] \rightarrow$ malla de tamaño de paso h ó bien $N = \dfrac{b-a}{h}$ = nº nodos/pasos

$x_n = x_0 + nh$, $x_0 = a$



$\underbrace{b-a}_{cte} = N.h$ luego $h \rightarrow 0 \equiv N \rightarrow \infty$

$$(P) = \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \xrightarrow{\text{DISCRETIZO}} (P_n) = \begin{cases} y_{n+k} = \mathcal{F}(x_n, \dots, x_{n+k}, y_n, \dots, y_{n+k}) \\ y_0, y_1, \dots, y_k \end{cases}$$

(Necesito k valores de arranque)

$\Downarrow$ $y(x)$ sol. exacta

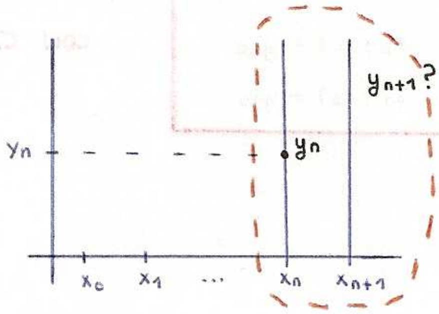
$\Downarrow$ $\{y_n\}_{n=0}^{N}$ sol. aprox

$(y_n) \simeq y_n$, $n = 0, \dots, N$

a) MÉTODO DE UN PASO (k=1)

$$\begin{cases} y_{n+1} = \mathcal{F}(x_n, x_{n+1}, y_n, y_{n+1}) \\ y_0 \end{cases}$$

Sólo liga un punto con el anterior.



⇒ Dos formas de calcularlos.

* **EXPLÍCITOS:** $y_{n+1} = \mathcal{F}(x_n, x_{n+1}, y_n)$

- COSTE COMPUTACIONAL: Cada iteración precisa una evaluación.
- VALORES DE ARRANQUE: Sólo necesito 1.

* **IMPLÍCITOS:** $y_{n+1} = \mathcal{F}(\underbrace{x_n, x_{n+1}, y_n}_{\text{conocidos}}, y_{n+1}) = \mathcal{F}'(y_{n+1})$

MÉTODO PUNTO FIJO.

$$\mathcal{F} \text{ CONTRACTIVA } \begin{cases} y_{n+2}^{p+1} = \mathcal{F}'(y_{n+1}^{p}) \\ y_{n+2}^{0} = y_n \end{cases}$$

$$\{y_{n+1}^{p}\} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} y_{n+2}$$

(22/5/2008)

b) MÉTODOS DE K PASOS.

Son aquellos del tipo:

$$y_{n+k} = \mathcal{F}(x_n, \dots, x_{n+k}, y_n, \dots, y_{n+k})$$

Utilizan información de k pasos anteriores

* **EXPLÍCITOS:** $y_{n+k} = \mathcal{F}(x_n, \dots, x_{n+k}, y_n, \dots, y_{n+k})$

  - COSTE COMPUTACIONAL: 1 evaluación de $\mathcal{F}$ / 1 iteración.

  - VALORES DE ARRANQUE: k valores de arranque.

* **IMPLÍCITOS:** $y_{n+k} = \mathcal{F}(x_n, \dots, x_{n+k}, y_n, \dots, y_{n+k})$

  - COSTE COMPUTACIONAL: 1 método iterativo / 1 iteración

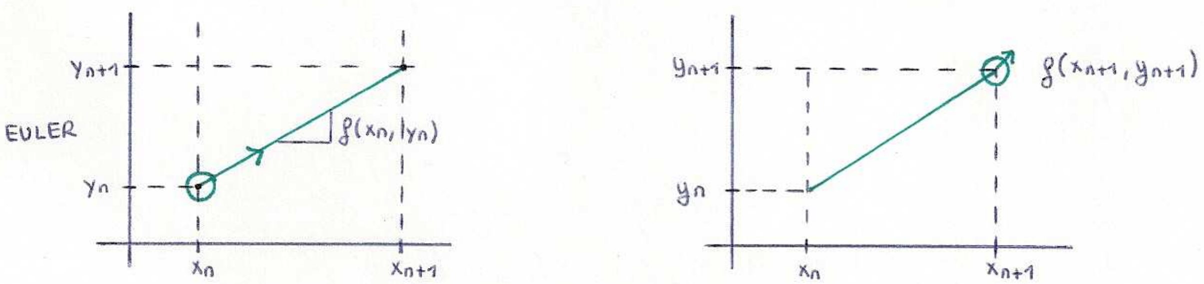
  - VALORES DE ARRANQUE: k valores de arranque.

* **EJEMPLO:**

EULER: $(E) = \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \\ y_0 \end{cases}$

Método 1 paso explícito
Coste → 1 eval f / 1 iteración
Nº valores de arranque → 1

INTERPOLACIÓN GRÁFICA — CONSTRUCCIÓN: EULER IMPLÍCITO



$$y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

2. MÉTODOS DE UN PASO.

a y b) MÉTODO DE EULER Y CONSTRUCCIÓN DE MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE PVI A PARTIR DE FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA.

ESTRATEGIA:

$$\text{Sea} \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \boxed{1} \\ + \\ fin \end{cases} \longrightarrow$$

$\longrightarrow$ * Malla (x_n)

* $$\underbrace{\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)\,dx}_{\substack{y(x_{n+1}) \simeq y_{n+1} \\ y(x_n) \simeq y_n \\ \Downarrow \\ y_{n+1} - y_n}} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) \simeq fin\left[f, [x_n, x_{n+1}]\right]$$

* Imponer igualdad:

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + fin\left[f, [x_n, x_{n+1}]\right]}$$

* **EJEMPLOS**:

① Fórmula del rectángulo con soporte extremo inferior:

$$\int_a^b f \simeq f(a)(b-a) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y(x_n)) \\ \text{(Esto todavía no es un método.} \\ \text{Todavía } y(x_n) \simeq y_n \end{cases} \longrightarrow (E) = \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \\ y_0 \end{cases}$$

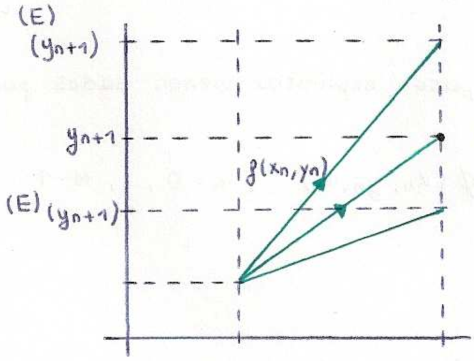
② $$\int_a^b f \simeq f(b)(b-a) \rightsquigarrow y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad \text{(E implícito)}$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) \simeq f(x_{n+1}, \underbrace{y(x_{n+1})}_{y_{n+1}}).h$$

③ Fórmula del trapecio:

$$\int_a^b f \simeq \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right) \rightsquigarrow y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right)$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) \simeq \frac{h}{2}\left(f(x_n, \underbrace{y(x_n)}_{y_n}) + f(x_{n+1}, \underbrace{y(x_{n+1})}_{y_{n+1}})\right)$$



* Método numérico de 1 paso implícito.

* Coste computacional → 1 método iterativo / iteración.

* 1 valor de arranque.

④ $\theta \in [0,1]$ $\quad \theta$ - métodos $\quad y_{n+1} = y_n + h\left[\theta f(x_n, y_n) + (1-\theta) f(x_{n+1}, y_{n+1})\right]$

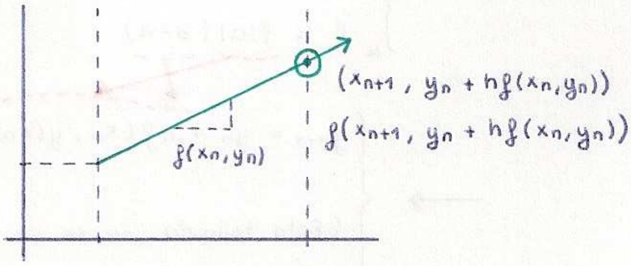
Las pendientes en las abscisas x_n y x_{n+1} son igual de válidas.

INCONVENIENTE: Los métodos implícitos requieren un método iterativo. ¿Cómo resolver métodos implícitos que utilicen pendientes en las abscisas x_n y x_{n+1}?

Método de Runge-Kulta.

Método numérico multievaluación

$y_n - y(x_n)$



Lo que me "molesta" es y_{n+1}, así que uso $(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))$.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \underbrace{y_n + hf(x_n, y_n)}_{\simeq y_{n+1}})\right]$$

c) ESTUDIO GENERAL DE LOS MÉTODOS DE UN PASO EXPLÍCITOS.

→ FORMULACIÓN GENERAL.

* $(P) \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & x \in [a,b] \quad \boxed{1} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ " f Lipschitziana dependiente de la 2ª variable, y continua.

* Malla $x_n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$

* Los métodos numéricos de un paso explícitos vienen dados por:

$$(P_n) = \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n, h), & n = 0, \dots, N-1 \\ y_0 \end{cases}$$

con $\phi(x, y, h)$ = Función que define el método numérico.

Observación:

$1 \to$ edo

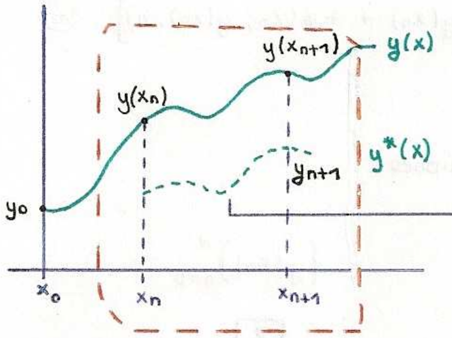
$\phi \to$ método numérico.

→ ESTUDIO DEL ERROR.

Valor del error → $|y_n - y(x_n)|$ $n = 0, \dots, N$ $\longrightarrow$ $\max |y_n - y(x_n)|$ $0 \leq n \leq N$

Para el estudio del error tenemos 2 responsables:

- Estamos $\begin{cases} \text{El método numérico} \\ \text{La edo} \end{cases}$, x_n , suponemos conocido $y(x_n)$.



No es la misma en cada iteración.

$$y(x) \text{ solución } \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \neq \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_{n+1}) = y_{n+1} \end{cases}$$

→ BONDAD DEL MÉTODO.

- **CONSISTENCIA:** Error del método en la iteración $n+1$ -ésima.
- **ESTABILIDAD:** Sensibilidad de la ec. diferencial a las perturbaciones. Influencia / propagación de los errores anteriores en una iteración debido a la edo.
- **CONVERGENCIA:** $\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(x_n)| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$
- **VELOCIDAD DE CONVERGENCIA:** orden $\left(\frac{1}{N} \to 0 \,,\; \frac{1}{N^2} \to 0 \right)$

  orden 1   orden 2

→ ERROR.

* ERROR GLOBAL DEL MÉTODO: $err = y(x_n) - y_n$

* ERROR LOCAL: Error del método cometido en una iteración.

$$\text{Sea} \quad y_n = y(x_n) \xrightarrow{\text{ITERO}} \begin{cases} y_{n+1} = \underset{\downarrow \; y(x_n)}{y_n} + h\phi(x_n, \underset{\downarrow \; y(x_n)}{y_n}, h) \\ y(x_{n+1}) \end{cases}$$

$$R_{n+1} = y(x_{n+1}) - \left[y(x_n) + h\phi(x_n, y(x_n), h) \right]$$

Observación: Tenemos 2 sucesiones:

$$\left\{ y_n \right\}_{n=0}^{N} \qquad \left\{ y(x_n) \right\}_{n=0}^{N}$$

$$\boxed{1} \qquad\qquad \boxed{2}$$

$\boxed{1}$ Verifica (P_n) " $y_{n+1} - \left[y_n + h\phi(x_n, y_n, h) \right] = 0$

$\boxed{2}$ Verifica (P) con error R_{n+1} " $y(x_{n+1}) - \left[y(x_n) + h\phi(x_n, y(x_n), h) \right] = R_{n+1}$

Por tanto:

* CONVERGENCIA: El método (P_n) es convergente si:

$$\max \left| y(x_n) - y_n \right| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

h, N fijo

* CONSISTENCIA: El método (P_n) es consistente con $\boxed{1}$ si:

$$\sum_{n=0}^{N} |R_n| \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \equiv \max_{0 \leq n \leq N} \frac{|R_n|}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \equiv$$

$$\equiv \max_{0 \leq n \leq N} \left| \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - \phi(x_n, y(x_n), h) \right| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

* ESTABILIDAD:

Sea $\{y_n\}$ solución de $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n, h) \\ y_0 \end{cases}$

$\{z_n\}$ solución de $\begin{cases} z_{n+1} = z_n + h\phi(x_n, y_n, h) + err \\ z_0 \end{cases}$

El método (P_n) es estable si existe una cte M (independientemente de h)

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - z_n| \leq M \left[|y_0 - z_0| + \sum_{n=0}^{N} |err| \right]$$

- TEOREMA: $\boxed{\text{Si el método } (P_n) \text{ es estable y consistente, entonces es convergente.}}$

Demostración.-

$$\left.\begin{array}{l} \{y_n\} \text{ solución } \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n, h) \\ y_0 \end{cases} \\ \\ \{y(x_n)\} \text{ solución } \begin{cases} y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\phi(x_n, y(x_n), h) + R_{n+1} \\ y(x_0) \end{cases} \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \max_{0 \leq n \leq N} \underbrace{|y(x_n) - y_n|}_{err} \leq M \left[\underset{\downarrow \atop 0}{|y(x_0) - y_0|} + \overbrace{\sum_{n=0}^{N} |R_{n+1}|}^{\xrightarrow[h\to 0]{} 0} \right] \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

(27/5/2008)

RESUMEN

$(P)\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \quad x \in [a,b] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$	+	$f\begin{cases}\text{Lipschitziana} \\ 2^{a} \text{ variable y} \\ \text{continua } [a,b]\end{cases}$	$\Rightarrow$	$\exists!\, y \in C^1$ solución exacta de (P)
$(P_n)\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n, h) \quad " \\ \qquad n = 0,1,\dots,N-1 \\ y_n \end{cases}$	+	$\phi\begin{cases}\text{Lipschitziana} \\ 2^{a} \text{ variable y} \\ \phi(x,y,h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x,y)\end{cases}$	$\Rightarrow$	(P_n) Converge

$\longrightarrow$ El algoritmo (P_n) aproxima la solución exacta de (P) haciendo $h \longrightarrow 0$

$$\max \underbrace{|y_n - y(x_n)|}_{err} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Observación:

$$f \to (P) \quad : \quad \phi \to (P_n)$$

$$\left.\begin{array}{l} (P_n) \text{ estable} \\ (P_n) \text{ consistente } \boxed{1} \end{array}\right\} (P_n) \text{ converge} \quad , \quad err \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

CARACTERIZACIÓN:

* TEOREMA → El método (P_n) es consistente con $\boxed{1}$ $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\phi(x,y,0)}_{\lim\limits_{h\to 0}\phi(x,y,h)} = f(x,y) \quad \forall x,y$$

* TEOREMA → Si la $\phi(x,y,h)$ → Lipschitziana respecto 2ª variable ⟹

⟹ (P_n) estable.

CONSECUENCIA:

$$\text{Si} \quad \phi(x,y,h) \begin{cases} \text{Lipschitziana } 2^{a} \text{ variable} \\ \phi(x,y,h) = f(x,y) \quad \forall x,y \end{cases} \Rightarrow (P_n) \text{ converge}$$

OBSERVACIÓN:

Si (P_n) converge ⟹ (P_n) consistente
$\not\Leftarrow$ (P_n) estable

* EJERCICIO: ¿Para qué (P) converge (E)?

Escribimos EULER con una nueva notación:

$$(E) \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \\ y_0 \end{cases}$$

EULER es un método numérico de un paso explícito ⟹

$$\phi(x,y,h) = f(x,y)$$
$$\phi(x_n,y_n,h) = f(x_n,y_n)$$

→

¿ Cuándo ϕ verifica las 2 condiciones ?

$$\phi \begin{cases} \text{Lipschitziana } 2^{a} \text{ variable cuando } f \text{ lo sea} \Rightarrow \text{(E) estable cuando } f \text{ sea Lips. } 2^{a} \text{ var.} \\ \phi(x,y,h) = f(x,y) \Rightarrow \text{(E) consistente} \end{cases} \Rightarrow \text{CONVERGE.}$$

*** ORDEN:** El método (P_n) es de orden p si p es el mayor natural que:

$$\underbrace{\max_{0 \leq n \leq N} \underbrace{\left| \frac{R_n}{h} \right|}_{O(h^p)} \leq k.h^p}$$ para todo y solución de $\boxed{1}$

$$\max_{0 \leq n \leq N} \left| \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - \phi(x_n, y(x_n), h) \right|$$

con $k = cte$ depende de ϕ, no depende de h.

Definición: $$\boxed{f(h) \in O(h^p) \text{ si } \frac{f(h)}{h^p} \xrightarrow[h \to 0]{} 0}$$

Observaciones:

1.) (P_n) orden $p \iff \dfrac{R_n}{h} = O(h^p)$

2.) (P_n) consistente $\iff \dfrac{R_n}{h} = O(h) \iff$ Orden $1 \iff \phi(x,y,0) = f(x,y)$

3.) Si (P_n) estable y orden p es $+$, (P_n) converge y err $\xrightarrow[h \to 0]{} 0$

a la velocidad $p \equiv \max\limits_{0 \leq n \leq N} |err| \leq k.h^p \equiv$

$$\equiv \max_{0 \leq n \leq N} |err| = O(h^p)$$

TEOREMA:

Sea $f \in C^p([a,b] \in \mathbb{R})$, $\phi \in C^p([a,b] \times \mathbb{R} \times [0,h_0])$, entonces:

$$(P_n) \text{ de orden } p \iff \begin{cases} \phi(x,y,0) = f(x,y) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial h}(x,y,0) = \dfrac{1}{2} f'(x,y) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^{p-1)} \phi}{\partial h^{p-1)}}(x,y,0) = \dfrac{1}{p} f^{p-1)}(x,y) \\ \dfrac{\partial^{p)} \phi}{\partial h^{p}}(x,y,0) = \dfrac{1}{p+1} f^{p)}(x,y) \end{cases}$$

NOTACIÓN:

$$f'(x,y(x)) = \underbrace{\frac{d}{dx}(x,y(x))}_{f_x(x,y)} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x))}_{f_y(x,y)} \cdot \underbrace{\frac{\partial y(x)}{\partial x}}_{y'(x) = f(x,y(x))}$$

$$f'(x,y) = f_x(x,y) + f_y(x,y) f(x,y) \longrightarrow \boxed{f' = f_x + f_y \cdot f}$$

$$f''(x,y) = \frac{d}{dx}\left(f_x(x,y) + f_y(x,y) f(x,y)\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dx} f_x(x,y)}_{\underbrace{\frac{\partial f_x}{\partial x}(x,y)}_{f_{xx}}} + \underbrace{\frac{d}{dx} f_y(x,y) f(x,y)}_{\underbrace{\frac{\partial f_x}{\partial y}(x,y)}_{f_{xy}} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{f}} =$$

FALTA

$$= f_{xx} + 2 f_{xy} \cdot f + f_{yy} \cdot f^2 + f_y \cdot f_x + f_y^2 \cdot f$$

(28/5/2008)

* EJEMPLO:

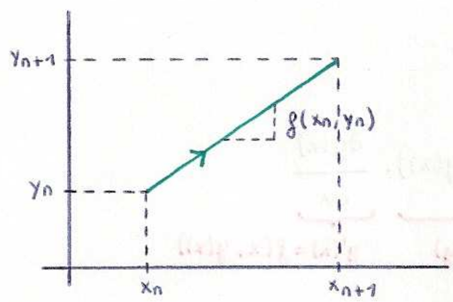
Sea f Lipschitziana 2ª variable y continua.

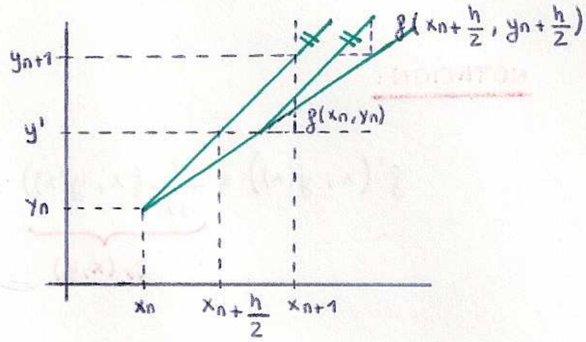
Sea el método de 1 paso explícito:

$$\phi(x,y,h) = f\left(x+\frac{h}{2},\ y+\frac{h}{2}f(x,y)\right)$$

Escribir el método, la gráfica, estudiar convergencia y orden.

MÉTODO: $(P_n) = \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n,y_n,h) = y_n + h\cdot f\left(x_n+\frac{h}{2},\ y_n+\frac{h}{2}f(x_n,y_n)\right) \\ y_0 \end{cases}$





EULER $(E) = \begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n,y_n) \\ y_0 \end{cases}$

$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}f(x_n,y_n) \\ y_0 \end{cases}$

ESTABILIDAD:

$$\boxed{\begin{array}{l} ¿\ \phi(x,y,h) \text{ Lipschitziana 2ª variable ?} \\ \qquad\qquad \Updownarrow \\ ¿\ \exists M \text{ cte } / \ |\phi(x,y_1,h)-\phi(x_1,y_2,h)| \leq M|y_1-y_2| \quad \forall x,h \end{array}}$$

$$|\phi(x,y_1,h)-\phi(x,y_2,h)| = f\left(x+\frac{h}{2},y_1+\frac{h}{2}f(x,y_1)\right) - f\left(x+\frac{h}{2},y_2+\frac{h}{2}f(x,y_2)\right) \leq$$

$$\leq L\cdot\left|y_1+\frac{h}{2}f(x,y_1) - \left(y_2+\frac{h}{2}f(x,y_2)\right)\right| \leq$$

$$\leq L\cdot\left(|y_1-y_2| + \frac{h}{2}\cdot|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\right) \leq \underbrace{\left(L+\frac{L}{2}\cdot L\right)}_{M=cte}|y_1-y_2| \quad \forall x,h$$

CONSISTENCIA Y ORDEN

① $\phi(x,y,0) = \lim_{h\to 0} (\phi(x,y,h) = \lim_{h \to 0} f\left(\underbrace{x+\frac{h}{2}}_{\text{tiende a } x}, \underbrace{y+\frac{h}{2}f(x,y)}_{\text{tiende a } y}\right) =$

$= f(x,y) \Rightarrow (P_n)$ consistente, es convergente.

② ¿Es de orden 2?

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial h}\right|_{h=0} \overset{¿?}{=} \frac{1}{2} f' = \frac{1}{2}(f_x + f_y \cdot f) \quad \forall x,y$$

Límite de la derivada de ϕ en h.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial h}\underbrace{\left(\overbrace{x+\frac{h}{2}}^{x^h}, \overbrace{y+\frac{h}{2}f(x,y)}^{y^h}\right)}_{z^h}\right|_{h=0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x^h}{\partial h} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y^h}{\partial h}\right|_{h=0} =$$

$$= \left| f_x(\underset{\substack{\downarrow h\to 0\\(x,y)}}{z^h}) \cdot \frac{1}{2} + f_y(\underset{\substack{\downarrow h\to 0\\(x,y)}}{z^h}) \cdot \frac{1}{2}f(x,y)\right|_{h=0} = \frac{1}{2}\left[f_x(x,y) + f_y(x,y)f(x,y)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} f' \quad \forall x,y \quad \Rightarrow \text{Es de orden 2.}$$

③ ¿Es de orden 3?

$$\left.\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial h^2}\right)\right|_{h=0} \overset{¿?}{=} \frac{1}{3} f'' \quad \forall x,y$$

$$\left.\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial h^2}\right)\right|_{h=0} = \left.\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\partial \phi}{\partial h}\right)\right|_{h=0} = \left.\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial h}\left(f_x(z^h) + f_y(z^h)f(x,y)\right)\right|_{h=0} =$$

$$= \left.\frac{1}{2}\cdot\left(\underbrace{\frac{\partial f_x}{\partial x}}_{f_{xx}}\cdot\underbrace{\frac{\partial x^h}{\partial h}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{\partial f_x}{\partial y}}_{f_{xy}}\cdot\underbrace{\frac{\partial y^h}{\partial h}}_{\frac{1}{2}f(x,y)} + \underbrace{f(x,y)}\left[\underbrace{\frac{\partial f_y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x^h}{\partial h}}_{f_{xy}\cdot\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{\partial f_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial y^h}{\partial h}}_{f_{yy}\cdot\frac{1}{2}f(x,y)}\right]\right)\right|_{h=0} =$$

$$= \left.\frac{1}{4}\left[f_{xx}(z^h) + 2f_{xy}(z^h)f(x,y) + f_{yy}\cdot f^2(x,y)\right]\right|_{h=0} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[f_{xx} + 2f_{xy}\cdot f + f_{yy}\cdot f^2\right] \neq \frac{1}{3}f'' = \frac{1}{3}\left[f_{xx} + 2f_{xy}f + f_x f_y + f_{yy}f^2 + f_y^2\cdot f\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ No es de orden 3 $\Rightarrow$ Orden 2.

Método 1 paso explícito	nº evaluaciones / iteraciones	Orden
(E)	1	1
(P_n)	2	2

$\rightarrow$ (P_n) $\Rightarrow$ Método de la tangente mejorada.

(29/5/2008)

d) ALGUNOS MÉTODOS DE UN PASO EXPLÍCITOS DE ORDEN SUPERIOR.

OBJETIVO $\rightarrow$ Obtener su método m-n-1 paso paso explícito de orden superior.

* MÉTODO DE TAYLOR. (depende de la ecuación diferencial)

Sea $\boxed{1}$ $y' = f(x, y(x))$, $f \in C^{p-1)}$

$\downarrow$ Desarrollo de Taylor

$$y(x+h) = y(x) + h.\underbrace{y'(x)}_{f(x,y)} + \frac{h^2}{2}.\underbrace{y''(x)}_{f'(x,y)} + \dots + \frac{h^p}{p!}.\underbrace{y^{p)}(x)}_{f^{p-1)}(x,y(x))} + O(h^{p+1}) =$$

$$= y(x) + h\underbrace{\left[f(x, y(x)) + \frac{h}{2} f'(x, y(x)) + \dots + \frac{h^{p-1}}{p!} f^{p-1)}(x, y(x))\right]}_{\substack{\parallel \text{ defino} \\ \phi(x,y,h)}} + O(h^{p+1})$$

$$(P_n)\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\,\phi(x_n, y_n, h) \\ y_0 \end{cases}$$

MÉTODO DE TAYLOR.

ESTUDIO DEL MÉTODO.

① ESTABILIDAD.

(P_n) estable $\iff \phi(x, y, h)$ Lipschitziana 2ª variable.

Para cada f, derivar $(f', f'', \dots, f^{(k)})$. Comprobar si todas las variables son Lipschitzianas de 2ª variable.

② CONSISTENCIA / ORDEN.

$$x = x_n \ , \quad x + h = x_{n+1} \longrightarrow \underbrace{\left| \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - \phi(x_n, y_n, h) \right|}_{\frac{R_n}{h} = \text{error local}} =$$

$$= \frac{O(h^{p+1})}{h} = O(h^p) \Rightarrow (P_n) \text{ orden } p.$$

EJEMPLO:

Construir el método de Taylor de orden 2 de:

$$(P) \begin{cases} y' = xy^2 = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Definimos $\phi(x,y,h) = f(x,y) + \frac{h}{2} f'(x,y) = xy^2 + \frac{h}{2}\left[y^2 + 2yxxy^2\right] =$

$$= xy^2 + \frac{h}{2}\left[y^2 + 2x^2y^3\right]$$

$$\Rightarrow (P_n) \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\left[x_n y_n^2 + \frac{h}{2}\left(y_n^2 + 2x_n^2 y_n^3\right)\right] & \text{orden } 2 \\ y_0 \end{cases}$$

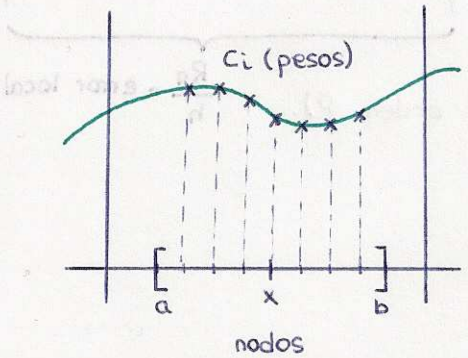
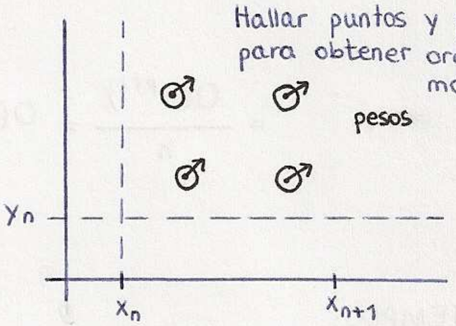
¿Es estable? $\iff$ ¿$\phi(x, y, h)$ Lipschitziana 2ª variable.

Es consiste y estable $\Rightarrow$ Converge.

③ INCONVENIENTE $\rightarrow$ No es programable (requiere hacer cosas a mano).

* MÉTODOS RUNGE-KUTTA.

Comparar estrategias numéricas: Obtener f.i.n. / método resolución PVI.

Problema: P.I.N. tipo interpolatorio	método PVI
Objetivo: Obtener orden máximo	m-n-1 pasos explícitos orden máx.
Multievaluada	Multievaluada
 $\int_a^b f \simeq \sum c_i f(x_i)$ orden máx.	Hallar puntos y pesos para obtener orden máximo  Orden maximo: $(P_n)\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \underbrace{h\phi(x,y,h)}_{c_1 f(x_1,y_1)+c_2 f(x_2,y_2)+\dots} \\ y_0 \end{cases}$ $y_1 + \phi f(x_1,y_1)$

→ MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE R EVALUACIONES.

Viene dado por:

$$\phi(x,y,h) = \sum_{r=1}^{R} \underbrace{C_r}_{\text{pesos}} . \underbrace{K_r(x,y,h)}_{\text{evaluaciones}} \qquad \begin{cases} k_1 = f(x,y) \\ k_2 = f(x + ha_2,\ y + hb_{21} f(x,y)) \\ \vdots \\ k_r = f(x + h\underbrace{a_r}_{\text{parámetro } x},\ y + h\sum_{s=1}^{r-1} \overbrace{b_{rs}}^{\text{parámetro } y} k_s) \end{cases}$$

$r = 1, \dots, R$

con a_r, b_{rs}, c_r parámetros elegidos para obtener convergencia y orden máximo.

ESTUDIO DEL MÉTODO.

Sea f Lipschitziana respecto a 2ª variable:

① CONSISTENCIA.

$$K_r(x,y,0) = f(x,y), \quad \forall r \Rightarrow \phi(x,y,0) = \sum_{r=1}^{R} C_r \overbrace{K_r(x,y,0)}^{f(x,y)} =$$

$$= f(x,y) \sum_{r=1}^{R} C_r \overset{¿?}{=} f(x,y)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{r=1}^{R} C_r = 1$$

Es decir, hay consistencia cuando los pesos suman 1.

② ESTABILIDAD.

f Lipschitziana 2ª variable $\Rightarrow k_1 = f$ Lipschitziana 2ª variable.

¿K_2 Lipschitziana?

$$\Downarrow$$

$$|K_2(x,y_1,h) - K_2(x,y_2,h)| = |f(x+ha, y_1 + hbf(x,y_1)) - f(x+ha, y_2 + hbf(x,y))$$

$$\exists L \downarrow$$

$$\leq |L \; y_1 + hbf(x,y_1) - (y_2 + hbf(x,y_2))|$$

$$\leq L(|y_1 - y_2| + hb|f(x,y_1) - f(x,y_2)|) \leq \underbrace{L(1 + hbL)}_{M = cte} |y_1 - y_2| \Rightarrow K_2 \text{ Lipschitziana.}$$

$$\boxed{\text{Si } f \text{ Lipschitziana 2ª variable} \Rightarrow \begin{cases} \text{Mét. Runge-Kutta de R eval. es ESTABLE} \\ \text{Mét. Runge-Kutta de R eval. CONVERGE} \end{cases} \Longleftrightarrow \quad \Longleftrightarrow \sum_{r=1}^{R} C_r = 1}$$

③ ORDEN.

$P(R)$ = Orden máximo que alcanza Runge-Kutta de R evaluaciones se verifica:

$$\left.\begin{array}{lll} - \text{Si} & R = 1,2,3,4 & \rightarrow P(R) = R \\ - \text{Si} & R = 5,6,7 & \rightarrow P(R) = R-1 \\ - \text{Si} & R = 8\ldots & \rightarrow P(R) = R-2 \end{array}\right\}$$

Runge-Kutta 4 es el más usado (pocas evaluaciones y buenas prestaciones).

EJEMPLO:

① RK1 ; $\phi(x,y,h) = c_1 K_1 = c_1 f(x,y) = f(x,y) \Rightarrow$ EULER.

② RK2 ; 2 evaluaciones, orden 2:

$$\phi(x,y,h) = c_1 K_1 + c_2 K_2 = c_1 f(x,y) + c_2 . f\underbrace{(\underbrace{x + ha_2}_{x^h}, \underbrace{y + hb_{21} f(x,y)}_{y^h})}_{z^h} \quad \text{Orden 2.}$$

$\Rightarrow$ Si $c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow$ Converge, orden 1.

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial \phi}{\partial h}\right|_{h=0} \overset{¿?}{=} \frac{1}{2} f' = \frac{1}{2}(f_x + f_y f)$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial h}\right|_{h=0} = 0 + c_2 \left(f_x(z^h) \underbrace{\frac{\partial x^h}{\partial h}}_{a_2} + f_y(z^h) \underbrace{\frac{\partial y^h}{\partial h}}_{b_{21} f(x,y)} \right)\Bigg|_{h=0} =$$

$$= c_2 \left[\underset{\substack{\downarrow h \to 0 \\ (x,y)}}{f_x(z^h)} . a_2 + b_{21} f(x,y) . f_y(z^h) \right]\Bigg|_{h=0} =$$

$$= c_2 \left[a_2 . f_x + b_{21} f . f_y \right] \overset{¿?}{=} f_x + f_y . f$$

$$\boxed{\begin{array}{l} c_2 - a_2 = \frac{1}{2} \\ c_2 - b_{21} = \frac{1}{2} \end{array}}$$

→ Para estos parámetros R-K alcanza orden 2.

$$\text{R-K2 converge orden 2} \Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_2 . a_2 = 1/2 \\ c_2 . b_{21} = 1/2 \end{cases}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN.

$$C_1 = 0 \ , \ C_2 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \quad b_{21} = \frac{1}{2}$$

$$\phi(x, y, h) = f\left(x + \frac{h}{2}, \ y + \frac{h}{2} f(x,y)\right) \longrightarrow$$ Método de la tangente mejorada.

③ RK4 ;

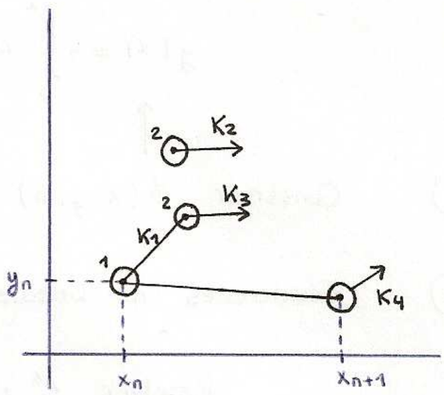
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

$$K_1 = f(x, y)$$

$$K_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, \ y + \frac{h}{2} k_1\right)$$

$$K_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, \ y + \frac{h}{2} k_2\right)$$

$$K_4 = f\left(x + h, \ y + hk_3\right)$$



Observación:

* Inmediata codificación.
* Coste computacional → 4 evaluaciones f / iteración.
* Altas prestaciones.
* Bajo error:

$$\underbrace{|e_n|}_{\text{error global}} \leqslant k \cdot h^4 \rightarrow \begin{cases} h = 1 \Rightarrow k \\ h = 10^{-2} \Rightarrow k \cdot 10^{-8} \end{cases}$$

EJERCICIOS.

MÉTODO RESOLUCIÓN PVI SIRVE PARA RESOLVER NUMÉRICAMENTE.

① $(P) = \begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ $\quad f \in C^1$ (PROB. 1) ó $f \in C,\ f \notin C^1$ (PROB. 2)

② Ecuación Integral (la incógnita está dentro y fuera de la integral).

$$y(x) = -\int_0^x \cos(s + y(s))\, ds + e^x \qquad \text{(PROB. 3)}$$

③ Construir $\phi(x, y, h)$ que alcanzan orden máximo (PROB. 4)

④ Ecuaciones no lineales:

Resolver $e^x + x - 3 = 0 \Rightarrow$ Resolver $\begin{cases} x'(z) = \dfrac{-2te^x}{1+t^2e^x} \\ x(0) = 3 \end{cases}$ (PROB. 5)

⑤ Sist. Ecuaciones diferenciales 1^{er} orden:

a) Modelo Lotka-Volterra (2D); depredador-presa (PROB. 6)

\+

Aplicar fin

b) Idem (3D): alces - coyotes - lobos (PROB. 9)

⑥ Sist. Ecuaciones diferenciales $2^{º}$ orden. (PROB. 7, PROB. 8)

* PROBLEMA 1.

Calcular la solución exacta $(P) = \begin{cases} y' = x - y, & x \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$y' + y = x$ EDO Lineal con coeficientes constantes no homogénea (porque $\neq 0$).

Solución general $\begin{cases} \text{Solución general homogénea (1)} \\ \text{Solución general no homogénea (2)} \end{cases}$

(1) $y' + y = 0 \Rightarrow \lambda + 1 = 0 \Rightarrow$ Raíces $\lambda = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Solución general $\Rightarrow$ $y(x) = e^{-x} \cdot C$

(2) $y' + y = x \longrightarrow y(x) = Ax + B \Rightarrow A + Ax + B = x \Rightarrow$

$\left.\begin{matrix} A = 1 \\ B = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y(x) = x - 1$ Solución particular

Por tanto, la Solución General No homogénea: $y(x) = C \cdot e^{-x} + x - 1$

La solución de (P) es (sólo puede haber una, la que cumpla $y(0) = 1$):

$y(0) = 1 \rightarrow C \cdot e^{0} + 0 - 1 = 1 \Rightarrow C - 1 = 1 \Rightarrow C = 2$

En resumen, la solución de (P) es:

$$\boxed{y(x) = 2e^{-x} + x - 1}$$

Aplicamos Euler para obtener la solución gráfica:

$$(P) = \begin{cases} y' = \overbrace{x - y}^{f(x,y)} \quad , x \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (E) = \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(x_n - x_j) \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

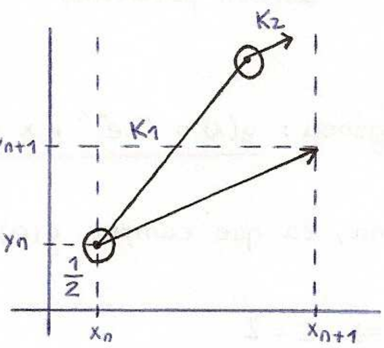
Escogemos un $h \rightarrow h = 0'2 \Rightarrow$ Malla $\rightarrow x_0 = 0,\ x_1 = 0'2, \dots, x_5 = 1$

$x_n = 0'2 . n\ ,\ n = 0, \dots, 5$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{n+1} = y_n + 0'2(0'2n - y_n) = (0'2)^2 . n + 0'8 . y_n \\ y_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = 0'8 \\ y_2 = 0'8^2 + 0'2^2 \\ \vdots \end{cases}$$

* Aplicamos el método Heum:

$$y_{n+1} = y_n + h\left[\underbrace{\frac{1}{2}}_{C_1}\underbrace{f(x_n, y_n)}_{K_1} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{C_2}\underbrace{f(x_n + h,\ y_n + hf(x_n, y_n))}_{K_2}\right]$$



Heum, $h = 0'2$:

$\phi = C_1K_1 + C_2K_2 \ /\ C_1 + C_2 = 1$ orden 1

... y también orden 2 (verificar)

* $y_n + 0'2(x_n - y_n) = 0'8y_n + 0'2^2 n$ (ver Euler)

$$(P) \begin{cases} y' = x - y \ , \ x \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (P_n) = \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h . \frac{1}{2}\left[(x_n - y_n) + f(x_{n+1}, \overbrace{y_n + h(x_n - y_n)}^{0'2^2 . n + 0'8y_n})\right] \\ y_0 = 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{x_n = 0'2 . n \\ n = 0, \dots, 5}]{h = 0'2} = \begin{cases} y_{n+1} = y_n + 0'1\left[0'2n - y_n + \underbrace{f(x_{n+1},\ 0'2^2 n + 0'8y_n)}_{x_{n+1} - (0'2^2 . n + 0'8y_n)}\right] \\ y_0 = 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} y_{n+1} = y_n + 0'1[0'2 + 0'36n + 1'8y_n] \\ y_0 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = 1'2 \\ y_2 = \dots \\ \vdots \end{cases}$$

(3/6/2008)

* PROBLEMA 6.

$y_1(t)$ = presas $\qquad$ $y_2(t)$ = depredadores

$$(1)\begin{cases} y_1'(t) = (1 - 0'01 y_2(t)) \cdot y_1(t) = f_1(t, y_1, y_2) \\ y_2'(t) = (-1 + 0'02 y_1(t)) \cdot y_2(t) = f_2(t, y_1, y_2) \\ y_1(0) = y_{10} = 20 \\ y_2(0) = y_{20} = 20 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\rightarrow (P)\begin{cases} \bar{y}'(t) = \bar{f}(t, \bar{y}(t)) \;;\; \bar{y}(t) = (y_1(t), y_2(t)) \;;\; \bar{y}'(t) = \dots \\ \bar{y}(0) = (y_{10}, y_{20}) = (20, 20) \;;\; t \in [0,1] \end{cases}$$

$$\dots \bar{y}'(t) = (y_1'(t), y_2'(t)) = \bar{f}(t, (y_1, y_2)) = f_1(t, (y_1, y_2)), f_2(t, (y_1, y_2)) \;''$$

$$f_1(t, y_1, y_2) = (1 - 0'01 y_2) y_1$$

$$f_2(t, y_1, y_2) = (-1 + 0'02 y_1) y_2$$

Aplico Euler a (P):

$$(P) + (E) = (P_n)\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + h\bar{f}(x_n, \bar{y}_n) \;'' \text{ No tenemos } \bar{y}_n \longrightarrow \\ \bar{y}_0 = (y_{10}, y_{20}) \end{cases}$$

$h = 1/4 \quad x_0 = 0 \quad x_1 = 1/2 \quad x_2 = 1/2$
$x_3 = 3/4 \quad x_4 = 1 \quad t \in [0,1]$

$$\longrightarrow \bar{y}_n = (y_n^1, y_n^2) \;'' \begin{cases} \{y_n^1\} \text{ sol. aprox. } y_1(x_n) \\ \{y_n^2\} \text{ sol. aprox. } y_2(x_n) \end{cases} \longrightarrow$$

$$\overset{(1-0'01\,y_n^2)\cdot y_n^1}{\overbrace{}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_{n+1}^1 = y_n^1 + h'\cdot f_1(x_n,(y_n^1,y_n^2)) \\ y_{n+1}^2 = y_n^2 + \underbrace{h.f_2(x_n,(y_n^1,y_n^2))}_{(-1+0'02\,y_n^1)\cdot y_n^2} \end{cases} \xrightarrow{h=\frac{1}{4}}$$

$$\xrightarrow{h=1/4} \begin{cases} y_1^1 = \underbrace{y_0^1}_{20} + \frac{1}{4}(1-0'01\underbrace{y_0^2}_{20})\underbrace{y_0^1}_{20} \simeq 24 \\ y_1^2 = \underbrace{y_0^2}_{20} + \frac{1}{4}(-1+0'02\underbrace{y_0^1}_{20})\underbrace{y_0^2}_{20} \simeq 17 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y_2^1 = \cdots \\ y_2^2 = \cdots \end{cases}$$

		Presas y_n^1	Depredadores y_n^2
$n=0$	$t_0=0$	20	20
$n=1$	$t_1=1/4$	24	17
$n=2$	$t_2=2/4$	28	14
$n=3$	$t_3=3/4$	35	13
$n=4$	$t_4=1$	42	12

(2) $$M_1 = \int_0^1 y_1(t)\,dt \underset{\uparrow \text{ Simpson}}{\simeq} \frac{1}{6}\left(\overset{20}{\overset{\shortparallel}{y_1(0)}} + 4\overset{28}{\overset{\shortparallel}{y_1\left(\frac{1}{2}\right)}} + \overset{42}{\overset{\shortparallel}{y_1(1)}}\right)$$

$$\int_a^b f \simeq \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

$$M_2 = \int_0^1 y_2(t)\,dt \simeq \cdots$$

③ $$M = \int_0^1 y_1(t)\,dt \underset{\text{trapecio corregida}}{\simeq} \frac{1-0}{2}\left(y_2(0) + y_1(1)\right) + \frac{(1-0)^2}{12}\left(y_1'(0) - y_1'(1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(20+42) + \frac{1}{12}\left[\underbrace{\left[(1-0'01\underbrace{y_2(0)}_{20})\cdot \underbrace{y_1(0)}_{20}\right]}_{16} - \underbrace{\left[(1-0'01\underbrace{y_2(1)}_{12})\cdot \underbrace{y_1(1)}_{42}\right]}_{36} \right] =$$

$\simeq \underline{29'3}$

* PROBLEMA 3. ECUACIÓN INTEGRAL

Solución de una ecuación integral $\equiv$ Sol. PVI

$$\underline{y(x)} \equiv \text{sol.} \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \equiv \underline{y(x)} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds$$

integro

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} y'(x)\,dx}_{y(x) - y(x_0)} = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds$$

derivo

$$\begin{cases} y'(x) = 0 + \underbrace{\int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds}_{f(x, y(x))} \\ y(x_0) = y_0 + \underbrace{\int_{x_0}^{x_0} f(s, y(s))\,ds}_{0} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Aplicando lo anterior:

Resolver (1) $\underbrace{y(x)} = - \int_0^x \cos(s + \underbrace{y(s)})\, ds + e^x$

Ec. integral $\Rightarrow$ Ec. incógnita está fuera y dentro de la integral.

$$P \equiv PVI \rightarrow (P) \begin{cases} y'(x) = -\cos(x + y(x)) + e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$(E)\ ;\ h = 0'5 \longrightarrow (P_n) = \begin{cases} y_{n+1} = y_n + \overbrace{h \cdot f(x_n, y_n)}^{e^{x_n} - \cos(x_n + y_n)} \\ y_0 = 1 \end{cases} \longrightarrow$$

malla: $x_0 = 0$
$x_1 = 1/2$
$x_2 = 1$

$$\longrightarrow y_1 = \underset{y_0}{1} + \underset{h}{\frac{1}{2}}\left(e^0 - \cos(0+1)\right) \simeq 1'23$$

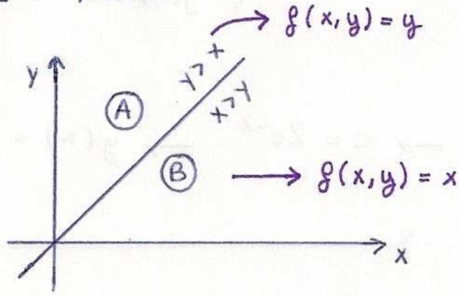
$$y_2 = 1'23 + \frac{1}{2}\left(e^{1/2} - \cos\left(\frac{1}{2} + 1'23\right)\right) \simeq 2'13$$

$\vdots$

* PROBLEMA 2. PVI CLÁSICO

$$(P) = \begin{cases} y'(x) = \max\{x,y\} \;;\; x \in [-0'5,\, 2'5] \\ y(-0'5) = 0 \end{cases}$$

$\max\{x,y\} \to f(x,y)$

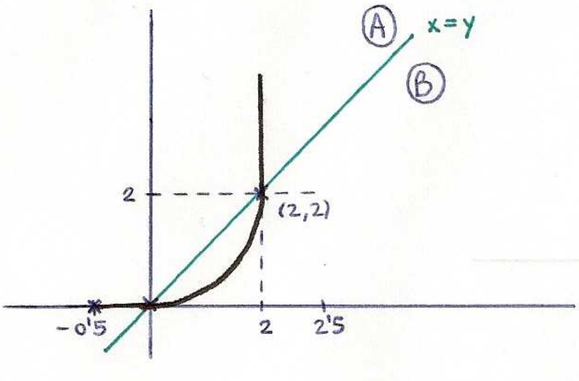


$f(x,y) = \max\{x,y\}$

¿Es $f \in C(\mathbb{R}^2)$? (continua) Si en $x=y$ x_0 $f \notin C^1(\mathbb{R}^2)$

$\Downarrow$ como es continua

$$\begin{cases} \exists!\ sol(P),\ y \in C^1 \\ \text{Euler } (P_n) \text{ converge} \end{cases}$$



$$(-0'5, 0) \in Ⓐ \to (P_1) \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(-0'5) = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{y'}{y} = 1 \to \ln 1 = C_1 \begin{cases} y(x) = C_1 e^x \\ y(-0'5) = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow y(-0'5) = C_1 \cdot e^{-0'5} = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow C_1 = 0 \longrightarrow y(x) = 0 \text{ sol. } (P_1)$$

$$\text{Sol } (P_2) \begin{cases} y'(x) = x \\ y(0) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y(x) = \dfrac{x^2}{2} + C_1 \\ y(0) = 0 \longrightarrow 0 + C_1 = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow y(x) = \frac{x^2}{2} \text{ sol } (P_2) \longrightarrow \text{Tiene sol.} \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2} \\ y = x \end{cases} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow x = 2,\ y(2) = \frac{2^2}{2} = 2$$

Sol (P_3) $\begin{cases} y' = y \\ y(2) = 2 \end{cases} \longrightarrow$ $y'(x) = C.e^x$

$y(2) = 2 \longrightarrow C.e^2 = 2 \longrightarrow$

$\longrightarrow C = 2e^{-2} \longrightarrow y(x) = 2e^{x-2}$ sol (P_3)

La sol. $y(x)$ de (P) $\longrightarrow \begin{cases} y(x) = 0 & x \in [-0'5, 0] \\ y(x) = \frac{x^2}{2} & x \in [0, 2] \\ y(x) = 2e^{x-2} & x \in [2, 2] \end{cases}$

$\Downarrow$

$y(x) = C^1$

Euler converge a $y(x)$.

Ejemplos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Ejemplo 1.

Sea

$$y'(t) = \frac{1}{2}, \quad t \in [0,1]$$

Ejemplo 2. Crecimiento de una población

El **crecimiento de una población en un ecosistema** viene dado por la **ecuación diferencial de orden uno**

$$y'(t) = a\, y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{y_{\max}}\right)$$

Veamos las soluciones numéricas del siguiente ecosistema

$$(1) \qquad y'(t) = 0.2\, y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{100}\right), \quad t \in [0,20]$$

donde:

- $y(t)$ mide el número de animales de la población, en el instante de tiempo t. Por tanto, $y'(t)$ mide la velocidad del crecimiento de la población. En particular, en los instantes donde $y'(t) > 0$ la población estará creciendo, cuando $y'(t) < 0$ la población decrece y si $y'(t) = 0$ la población se mantiene constante.
- $a = 0.2$ es el factor que mide la capacidad reproductora de la especie animal considerada. El factor $0.2\, y(t)$ indica que la población aumenta más rápidamente cuanto mayor sea la población. Si sólo tuviésemos ese término, la población crecería exponencialmente sin límite. Pero, en la práctica eso no sucede porque los recursos disponibles no son infinitos. Para reflejar esto en la ecuación diferencial se introduce el siguiente factor,
- $y_{\max} = 100$ es el límite máximo de animales en el ecosistema.

Para calcular las **soluciones** $y(t)$ de la ecuación diferencial (1), solo disponemos <u>**solo**</u> de la siguiente información: en cada $(t, y(t))$ conozco

$$(1) \qquad y'(t) = f(t, y(t)) = 0.2\, y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{100}\right), \quad t \in [0,20]$$

qa indica la velocidad de crecimiento de la población en el instante t y con un población de $y(t)$. Podemos dibujar la gráfica del **campo de direcciones de la ecuación diferencial** (1). En el plano $(t = \text{tiempo}, y(t) = \text{número de animales de la población})$ dibujamos el 'flujo' de las soluciones mediante flechas que indiquen su dirección (ascendente si $f(t, y(t)) = y'(t) > 0$, descendente si $f(t, y(t)) = y'(t) < 0$ y constante si $f(t, y(t)) = y'(t) = 0$). La siguiente Figura 1 muestra el campo de direcciones de la ecuación (1), obtenido con el comando *dfieldplot* de Maple.

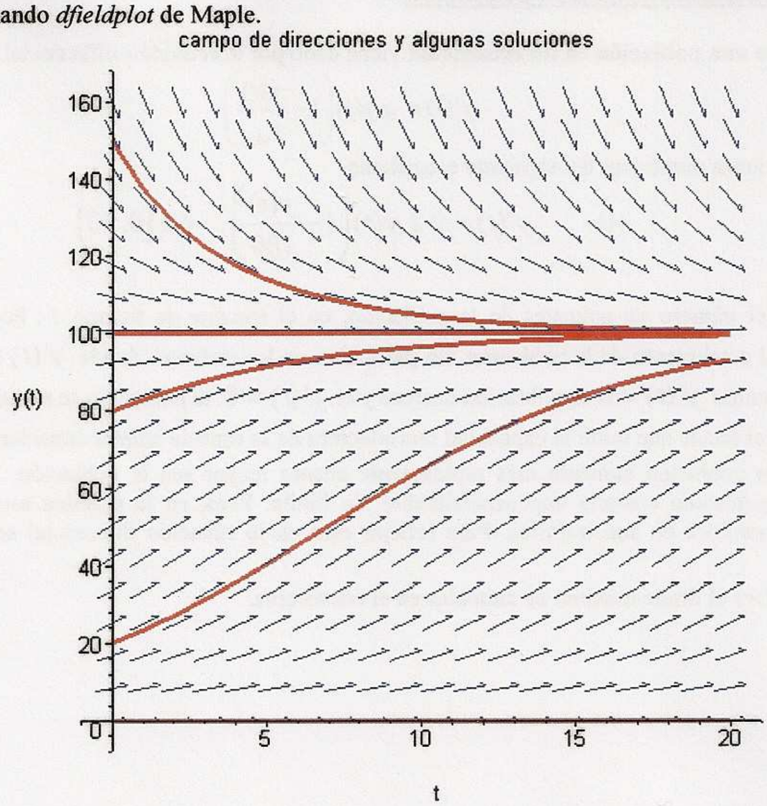


Figura 1: Campo de direcciones y algunas soluciones de la Ecuación Diferencial (1).

De la inspección de la Figura 1 se puede observar:

1. Una ecuación diferencial de orden 1 tiene un 'plano de soluciones' (una familia unidimensional de soluciones): para cada **condición inicial** (t_0, y_0) existe una solución de (1) que cumple esa condición (esto es, que pasa por ese punto). En la Figura se han destacado las soluciones que cumplen las condiciones iniciales $\{(0,0), (0,20), (0,80), (0,100), (0,150)\}$.
2. Las funciones constantes $y(t) = 0, \quad y(t) = 100$ son soluciones (soluciones de equilibrio). ¿Por qué?.
3. Las soluciones de arrancan con un número de animales mayor de $y_{max} = 100$ decrecen hasta alcanzar asintóticamente una solución de equilibrio ($y(t) = 100$). Las soluciones de arrancan con un número de animales menor de $y_{max} = 100$ crecen hasta alcanzar asintóticamente una solución de equilibrio ($y(t) = 100$). ¿Cuál de estas soluciones verifica cada una de las siguientes condiciones: $f(t, y(t)) < 0$, $f(t, y(t)) > 0$ y $f(t, y(t)) = 0$?.
4. Si en el instante $t = 15$ hay una población de 60 animales, ¿qué población había en el ecosistema en el instante $t = 5$?.

Nota: Intuitivamente el campo de direcciones de una ecuación diferencial se puede considerar como un flujo, de tal forma que si dejamos una partícula en una posición (condición inicial), la trayectoria de la partícula arrastrada por el flujo coincide con la gráfica de la solución de la ecuación diferencial.

Ejemplo 3. Modelo depredador-presa de Lotka-Volterra

El **crecimiento de dos poblaciones (depredador-presa) en un ecosistema** viene dado por el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, denominado modelo depredador-presa de Lotka-Volterra:

$$(2) \quad \begin{cases} y_1'(t) = (1 - 0.01\, y_2(t))\, y_1(t) \\ y_2'(t) = (-1 + 0.02\, y_1(t))\, y_2(t) \end{cases}, \quad t \in [0,15]$$

donde $y_1(t)$, $y_2(t)$ miden el tamaño (número) de la población de presas y depredadores, respectivamente, en el instante t.

En el instante inicial $t_0 = 0$ las poblaciones son de $y_1(0) = y_2(0) = 20$.

La siguiente gráfica muestra la solución aproximada del sistema (2), con las condiciones iniciales citadas, en el intervalo [0,15].

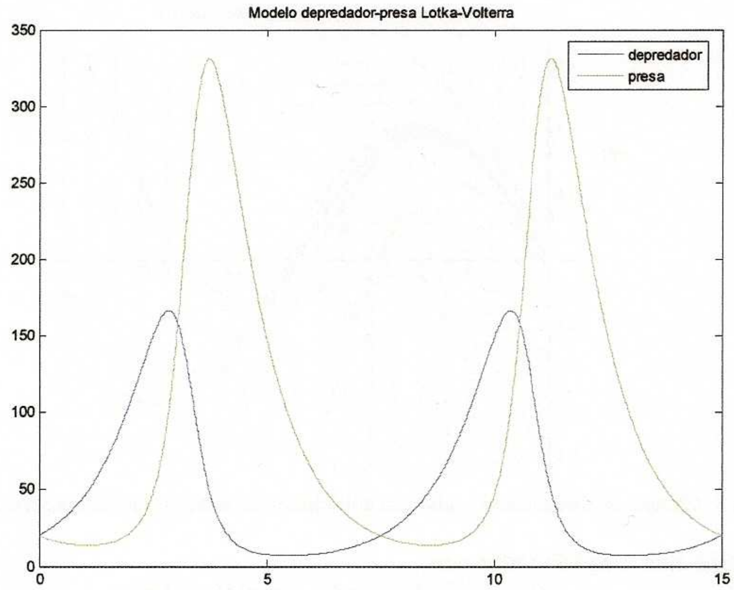


Figura 2: Solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales (2), con las condiciones $y_1(0) = y_2(0) = 20$, en el intervalo [0,15].

Conocidas las soluciones aproximadas $y_1(t)$, $y_2(t)$ en el intervalo $[0,15]$ se puede calcular, por ejemplo, las poblaciones medias, $_1$ y $_2$, de cada una las dos especies en dicho intervalo:

$$\int_0^{15} y_1(t)dt = M_1, \qquad \int_0^{15} y_2(t)dt = M_2$$

Ejemplo 4. Ecuación diferencial inestable y ecuación diferencial estable

Sea la **ecuación diferencial de orden uno**

$$(3) \qquad y'(t) = y(t) + \cos(t) - sen(t)$$

Se puede comprobar inmediatamente que la solución general es $y(t) = A e^{t} + sen(t)$.

Veamos como esta ecuación diferencial tiene una solución inherentemente **inestable**, ningún método numérico nos dará soluciones aceptables. Consideramos el problema de encontrar la única solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + \cos(t) - sen(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

La solución exacta se obtiene para $A = 0$, por tanto se trata de la función $y(t) = sen(t)$.

Estudiamos ahora el comportamiento de la solución numérica. La Figura 3 muestra el campo de direcciones de la ecuación diferencial (3), y se destacan las soluciones para cada una de las siguientes condiciones iniciales:

$$y(0) = 0.001, \quad y(0) = -0.001, \quad y(0) = 0.01, \quad y(0) = -0.01, \quad y(0) = 0.1, \quad y(0) = -0.1$$

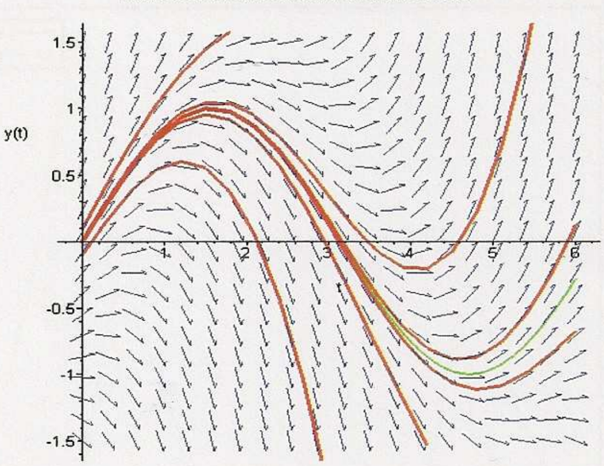


Figura 3: Campo de direcciones y algunas soluciones de la ecuación diferencial inestable (3).

Sea ahora la **ecuación diferencial de orden uno**

$$(4) \qquad y'(t) = -y(t) + \cos(t) + sen(t)$$

Cuya solución general es $y(t) = A e^{-t} + sen(t)$.

Veamos como esta ecuación diferencial tiene una solución inherentemente **estable**. A diferencia de la ecuación diferencial anterior, el error introducido con las condiciones iniciales (esto es, perturbaciones iniciales) es amortiguado por el 'flujo' de las soluciones, y por tanto, tiende a desaparecer inmediatamente. La Figura 4 muestra el campo de direcciones de la ecuación diferencial (4), y se destacan las soluciones para cada una de las siguientes condiciones iniciales: $y(0) = 0.5, \quad y(0) = -0.5, \quad y(0) = 1, \quad y(0) = -1, \quad y(0) = 1.5, \quad y(0) = -1.5$.

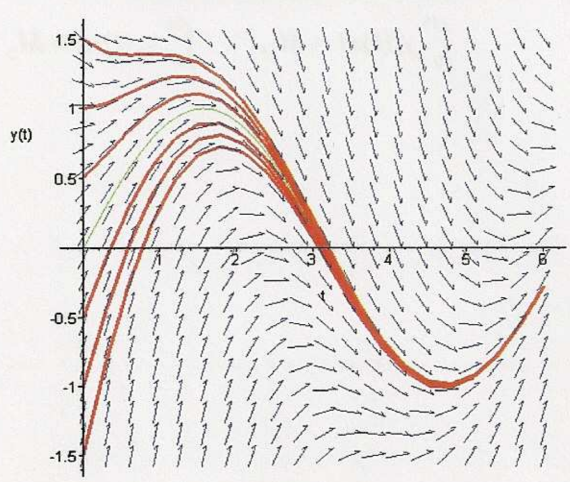


Figura 4: Campo de direcciones y algunas soluciones de la ecuación diferencial estable (4).

TEMA 6: RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Problema 1 Se quiere analizar la bondad de los métodos de Euler, Taylor y Runge-Kutta en la resolución del problema de valor inicial siguiente cuya solución exacta es sencilla de obtener

$$\begin{cases} y' = x - y, & x \in [0,1],\ y \in IR \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Para ello se determinará el error directamente, comparando los valores de la citada solución exacta con los que resultan de los diferentes métodos para distintos tamaños del paso h. **Se pide**: 1) Determinar analíticamente la solución del problema. 2) Aplicar el método de Euler en el intervalo $[0,1]$ en los tres casos siguientes: a) $h = 0.2$, b) $h = 0.1$ y c) $h = 0.05$.

3) Aplicar el método de Taylor de segundo orden empleando los mismos valores del paso que en el apartado anterior. 4) Emplear los dos métodos Runge-Kutta de dos evaluaciones siguientes para los tamaños del paso indicados anteriormente:

Método Heun $$y_{i+1} = y_i + h\left[\frac{1}{2}f(x_i, y_i) + \frac{1}{2}f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))\right]$$

Método tangente mejorado $$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i))$$

5) Comentar si son iguales o no los resultados obtenidos en los apartados 3) y 4) e indicar el motivo. ¿Qué ocurriría respecto a la coincidencia o no de resultados si la ecuación diferencial del problema de valor inicial fuera ahora $y' = y^2$? ¿En que se distingue este caso del otro?

Problema 2 Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = máx\{x, y\}, & x \in [-0.5, 2.5],\ y \in IR \\ y(-0.5) = 0 \end{cases}$$

Se pide: 1) Hallar la solución numérica en $[-0.5, 2.5]$ empleando el método de Euler con pasos $h = 1.0$, $h = 0.5$ y $h = 0.25$. 2) Justificar si se puede aplicar o no un método de Taylor de orden dos o superior. 3) Determinar la solución exacta y compararla con las soluciones numéricas halladas.

Problema 3 *Una ecuación integral es aquella donde aparece una función $y(x)$ incógnita relacionada con una integral donde dicha función aparece también en el integrando.* Comprobar que la solución $y(x)$ del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & x \in [x_0, x_0 + H],\ y \in IR \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

verifica la siguiente ecuación integral y recíprocamente

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$$

Aplicación: Teniendo en cuenta la relación anterior emplear el método de Euler para hallar numéricamente la solución de la ecuación integral

$$y(x) = -\int_0^x \cos(s + y(s))ds + e^x \qquad (1)$$

en el intervalo $[0,1]$ para un paso $h = 0.5$.

Problema 4 Para la resolución del problema de valor inicial $y'(x) = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0$ se define un método de un paso mediante la expresión $y_{i+1} = y_i + h\Phi(x_i, y_i, h)$ siendo la función Φ del método de la forma

$$\Phi(x, y, h) = c_1 f(x + \frac{h}{2}, y + \alpha\, hf(x, y)) + c_2 f(x + \beta\, h, y + \gamma\, hf(x, y))$$

donde f es una función continua y lipschitziana respecto a su segundo argumento.

Se pide: 1) Estudiar la consistencia, estabilidad y convergencia del método dependiendo de los valores de los parámetros c_1, c_2, α, β y γ. 2) Obtener las relaciones que deben verificar los parámetros para que resulte un método del mayor orden posible. 3) Determinar razonadamente el orden que resulta en los casos siguientes:

a) $c_1 = c_2 = 1/2, \alpha = 1/2, \beta = \gamma = 0$ b) $c_1 = 1, c_2 = 0, \alpha = 1/2, \beta = \gamma = 0$

Problema 5 Una ecuación no lineal se puede resolver aplicando cualquier método de resolución de problemas de valor inicial. En efecto, supongamos, por ejemplo, que se desea determinar la única raíz real x^* de la ecuación

$$(1) \qquad e^x + x - 3 = 0$$

Se forma ahora la ecuación (2) (se podrían formar otras análogas), introduciendo un parámetro $t \in [0,1]$

$$(2) \qquad t^2 e^x + x - 3 = 0$$

La ecuación (2) define la función $x(t)$, es decir x como función implícita de la variable t (para cada valor de t se determina la correspondiente raíz $x(t)$ de la ecuación (2)). Así cuando $t = 0$ la raíz de (2) es $x(0) = 3$ y cuando $t = 1$ la (2) se transforma en (1) de ahí que $x(1) = x^*$, que es la raíz que se busca. Por otra parte derivando en (2) respecto de t, teniendo en cuenta que x depende de t, resulta la ecuación diferencial

$$(3) \qquad 2te^x + (t^2 e^x + 1)x' = 0$$

De lo anterior se tiene que: *la raíz* x^* *de* (1) *puede calcularse resolviendo en el intervalo* $[0,1]$ *el siguiente problema de valor inicial*

$$(4) \qquad \text{P.V.I} \; \{ \; x' = -\frac{2te^x}{1 + t^2 e^x}, \quad x(0) = 3 \; \}$$

siendo $x(1) = x^*$, tal y como ya se ha indicado. **Se pide:** **a)** Para $h = 0.1$ calcular solo las dos o tres primeras iteraciones: $x_1, x_2, \ldots$, aplicando al P.V.I (4) el método siguiente

$$(5) \quad x_{i+1} = x_i + hf(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} f(t_i, x_i))$$

(*Sol.* $x^* = 0.79206 \approx x_{10} = 0.78220$)

b) Justificar que el método (5) es consistente, estable y convergente. *Nota:* supóngase (no es necesario demostrarlo) que $f(t, x)$ es lipschitziana respecto de x.

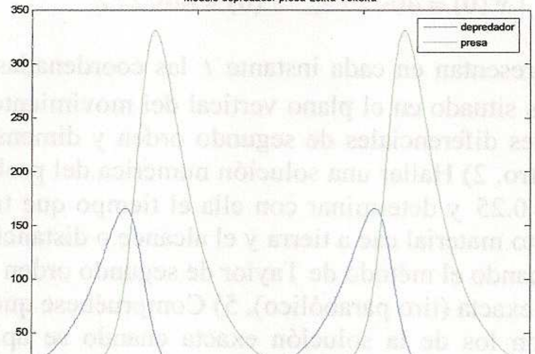
c) Si en lugar de la ecuación (2) se utilizara la ecuación $e^x + tx - 3 = 0$ ¿qué problema de valor inicial habría que resolver en ese caso para estimar x^*?

Problema 6 Sea el sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, denominado modelo depredador-presa de Lotka-Volterra:

$$(1) \begin{cases} y_1' = (1 - 0.01\, y_2)\, y_1 \\ y_2' = (-1 + 0.02\, y_1)\, y_2 \end{cases}$$

donde $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$ miden el tamaño (número) de la población de presas y depredadores, respectivamente, en el instante t.

En el instante inicial $t_0 = 0$ las poblaciones son de $y_{1,0} = y_1(0) = y_{2,0} = y_2(0) = 20$. A modo ilustrativo se muestra la gráfica de la solución aproximada del sistema (1) en el intervalo [0,15].



Se desean calcular las poblaciones medias, M_1 y M_2, de cada una las dos especies en el intervalo $[0, 1]$

$$\int_0^1 y_1(t)dt = M_1, \qquad \int_0^1 y_2(t)dt = M_2$$

realizando las siguientes cuestiones.

1. Escribir el sistema (1) como un problema de valor inicial de la forma:

$$(P)\ \begin{cases} \bar{y}'(t) = \bar{f}(t, \bar{y}(t)) \\ \bar{y}(0) = (y_{1,0}, y_{2,0}) \end{cases}$$

con $\bar{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))$ y $\bar{f}(t) = (f_1(t, \bar{y}(t)), f_2(t, \bar{y}(t)))$.

Resolver el problema (P) en el intervalo $[0, 1]$, utilizando el método de Euler con un tamaño de paso $h = 0.25$.

2. Calcular una aproximación de cada una de las poblaciones medias, en el intervalo $[0, 1]$, M_1 y M_2, donde, para aproximar el valor de la integral se utilizará la fórmula de integración de Simpson y los valores aproximados de $y_1(t)$, $y_2(t)$ obtenidos en el apartado anterior.
3. La misma cuestión del apartado anterior, utilizando en este caso la fórmula de integración del trapecio corregida:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] + \frac{(b-a)^2}{12}[f'(a) - f'(b)]$$

Problema 7 Un punto material (por ejemplo una pequeña piedra) se lanza al aire, desde una altura de 2m, con una velocidad inicial de módulo 40m/s y ángulo con su proyección horizontal de 45º ($\pi/4$ radianes) en el supuesto de que el rozamiento con el aire sea despreciable y sabiendo que el problema de valor inicial que rige el movimiento de acuerdo con la ley de Newton $\bar{f} = m\bar{a}$, es decir $m(0, -g) = m(x''(t), z''(t))$, es

$$\begin{cases} x''(t) = 0, \quad z''(t) = -9.8, \quad t > 0 \\ x(0) = 0, \quad z(0) = 2 \\ x'(0) = 40\sqrt{2}/2, \quad z'(0) = 40\sqrt{2}/2 \end{cases}$$

donde $x(t)$ y $z(t)$ representan en cada instante t las coordenadas del punto material en un sistema de coordenadas situado en el plano vertical del movimiento. Se pide: 1) Transformar el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden y dimensión dos en uno de primer orden y dimensión cuatro. 2) Hallar una solución numérica del problema aplicando el método de Euler con paso $h = 0.25$ y determinar con ella el tiempo que transcurre desde el instante inicial hasta que el punto material cae a tierra y el alcance o distancia horizontal recorrida.
3) Lo mismo pero aplicando el método de Taylor de segundo orden con un paso $h = 0.5$
4) Obtener la solución exacta (tiro parabólico). 5) Compruébese que los valores de la solución numérica coinciden con los de la solución exacta cuando se aplica el método de Taylor. Justificar el motivo. Nota: Obsérvese que la solución exacta se obtiene de forma elemental pues el sistema de ecuaciones está desacoplado (de hecho este problema se resolvía analíticamente ya en Bachillerato).

Problema 8 Resolver el problema anterior con las mismas condiciones iniciales cuando se considera además de la acción gravitatoria $\overline{F}_g = m\bar{g}$, el rozamiento $\overline{F}_R = -C_R|\bar{v}|\bar{v}$ con el aire, en cuyo caso la ecuación del movimiento es $m\bar{a} = m\bar{g} - C_R|\bar{v}|\bar{v}$, es decir

$$\begin{cases} x'' = -\dfrac{C_R}{m} x' \sqrt{x'^2 + y'^2} \\ y'' = -g - \dfrac{C_R}{m} y' \sqrt{x'^2 + y'^2} \end{cases}$$

con $\bar{g} = (0, -g)$

1) Transformar el sistema en uno equivalente de primer orden. 2) Suponiendo que el coeficiente de rozamiento viene dado por $C_R = 0.003 \times m$ (*simplificación académica*) hallar una solución numérica del problema aplicando el método de la tangente mejorado, con paso $h = 0.5$ y determinar como antes el tiempo que transcurre desde el instante inicial hasta que el punto material cae a tierra y el alcance o distancia horizontal recorrida.

Comentario sobre C_R : La resistencia o fuerza de rozamiento F_R que se produce en un cuerpo cuando se mueve en un medio fluido (aire, agua, etc.) depende de diversos factores, como son la densidad ρ del fluido, el área frontal A del cuerpo (la que se ve mirando en la dirección de la velocidad v) el cuadrado del módulo de la velocidad y un coeficiente C_D que depende de la forma del cuerpo y del número de Reynolds R_E, que depende a su vez de la velocidad, de la densidad, de la viscosidad del fluido y asimismo de la longitud del cuerpo en la dirección del movimiento. El coeficiente C_R es en realidad un factor que multiplica al cuadrado del módulo de la velocidad y su cálculo preciso depende del coeficiente C_D el cual como se ha indicado depende de la velocidad a través del numero de Reynolds. El módulo de la fuerza de rozamiento es $|\overline{F}_R| = C_R|\overline{v}|^2$ siendo $\overline{F}_R$ opuesta a la velocidad $\overline{v}$ luego

$$\overline{F}_R = -(\frac{1}{2}\rho A C_D)|\overline{v}|\overline{v}$$

Problema 9 Un modelo simplificado (pero de gran utilidad) para el estudio de la interacción entre las poblaciones de alces (A), coyotes (C) y lobos (L) en el parque de Yellowstone, se rige por el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden siguiente (v. D. G. Zill: *Ec. Diferenciales con aplicaciones de modelado*):

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = 0.04A - 0.003A\cdot C - 0.85A\cdot L \\ \dfrac{dC}{dt} = -0.06C + 0.001A\cdot C \\ \dfrac{dL}{dt} = -0.12L + 0.005A\cdot L \end{cases}$$

Las poblaciones (en millares) en función del tiempo t (en años), de alces $A(t)$, coyotes $C(t)$ y lobos $L(t)$ en el instante de partida, año 1995, vienen dadas por la condición inicial siguiente:

$$A(0) = 60.0, \quad C(0) = 2.0, \quad L(0) = 0.015,$$

Estimar mediante los métodos: a) Euler, b) Tangente mejorado y c) Runge-Kutta clásico, con $h = 0.5$ (para todos los métodos), las poblaciones de animales y su evolución hasta el momento actual. Comparar los valores obtenidos con los que proporciona el procedimiento basado en las siguientes instrucciones de MAPLE:

$$a1 := diff(a(t),t) - 0.04 * a(t) + 0.003 * a(t) * c(t) + 0.85 * a(t) * l(t);$$
$$a2 := diff(c(t),t) + 0.06 * c(t) - 0.001 * a(t) * c(t);$$
$$a2 := diff(l(t),t) + 0.12 * l(t) - 0.005 * a(t) * l(t);$$
$$sys := \{a1, a2, a3\};$$
$$ic := \{a(0) = 60.0, c(0) = 2.0, l(0) = 0.015\};$$
$$ivp := sys\ union\ ic :$$
$$H := dsolve(ivp, \{a(t), c(t), l(t)\}, numeric);$$